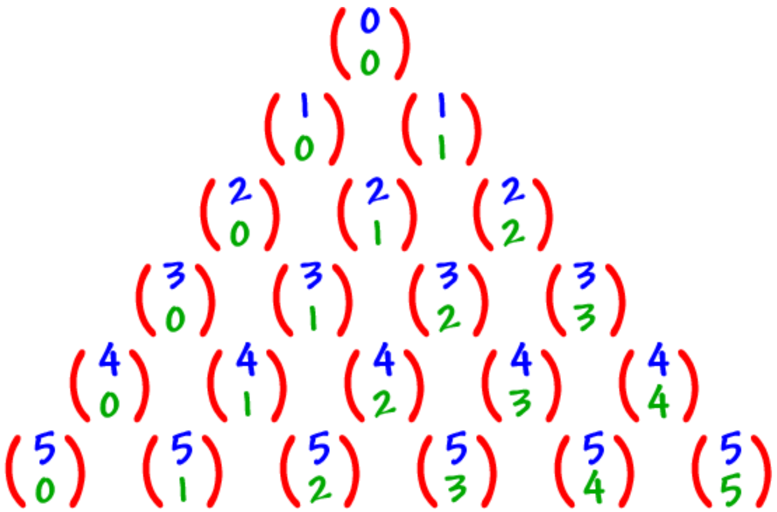


Kombinatorial (Bagian 2)

Bahan Kuliah

IF2120 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI - ITB

Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum

Misalkan: ada n buah bola yang tidak seluruhnya berbeda warna (jadi, ada beberapa bola yang warnanya sama - *indistinguishable*).

n_1 bola diantaranya berwarna 1,
n_2 bola diantaranya berwarna 2,
$\vdots$
n_k bola diantaranya berwarna k,

dan $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Berapa jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam kotak-kotak tersebut (tiap kotak berisi satu buah bola)?

Jika n buah bola itu kita anggap berbeda semuanya, maka jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam n buah kotak adalah:

$$P(n, n) = n!.$$

Dari pengaturan n buah bola itu,

ada $n_1!$ cara memasukkan bola berwarna 1

ada $n_2!$ cara memasukkan bola berwarna 2

$\vdots$

ada $n_k!$ cara memasukkan bola berwarna k

Permutasi n buah bola yang mana n_1 diantaranya berwarna 1, n_2 bola berwarna 2, …, n_k bola berwarna k adalah:

$$\boxed{P(n; n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{P(n,n)}{n_1! n_2! ... n_k!} = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}}$$

Jumlah cara pengaturan seluruh bola kedalam kotak adalah:

$C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n, n_1)\, C(n - n_1, n_2)\, C(n - n_1 - n_2\,, n_3)$
$\ldots\, C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}, n_k)$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \; \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}$$

$$\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_k)!}$$

$$\ldots \; \frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}-n_k)!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}$$

Kesimpulan:

$$\boxed{P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}}$$

Jika $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$, maka, bentuk rumus di atas menjadi permutasi n elemen yang berbeda, yaitu

$$P(n; 1, 1, \ldots, 1) = C(n; 1, 1, \ldots, 1) = \frac{n!}{1!1!\ldots1!} = n!$$

Contoh 10. Berapa banyak "kata" yang dapat dibentuk dengan menggunakan huruf-huruf dari kata *MISSISSIPPI*?

<u>Penyelesaian</u>:

$S = \{M, I, S, S, I, S, S, I, P , P , I\}$

huruf M = 1 buah (n_1)

huruf I = 4 buah (n_2)

huruf S = 4 buah (n_3)

huruf P = 2 buah (n_4)

$n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11$ buah = $| S |$

Cara 1: Jumlah *string* = $P(11; 1, 4, 4, 2)$

$$= \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)} = 34650 \text{ buah.}$$

Cara 2: Jumlah *string* = $C(11, 1)C(10, 4)C(6, 4)C(2, 2)$

$$= \frac{11!}{(1!)(10!)} \cdot \frac{10!}{(4!)(6!)} \cdot \frac{6!}{(4!)(2!)} \cdot \frac{2!}{(2!)(0!)}$$

$$= \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)}$$

= 34650 buah

Contoh 11. Berapa banyak cara membagikan delapan buah mangga kepada 3 orang anak, bila Billy mendapat empat buah mangga, dan Andi serta Toni masing-masing memperoleh 2 buah mangga.

Penyelesaian: Mangga Billy: BBBB, mangga Andi: AA, mangga Toni: TT

$n = 8$, $n_1 = 4$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, dan $n_1 + n_2 + n_3 = 4 + 2 + 2 = 8$

Jumlah cara membagi seluruh mangga = $\dfrac{8!}{(4!)(2!)(2!)} = 420$ cara

Contoh 12. 12 buah lampu berwarna (4 merah, 3 putih, dan 5 biru) dipasang pada 18 buah soket dalam sebuah baris (sisanya 6 buah soket dibiarkan kosong). Berapa jumlah cara pengaturan lampu?

Penyelesaian:
n = 18; n_1 = 4, n_2 = 3, n_3 = 5, dan n_4 = 6 (*socket* kosong)

Jumlah cara pengaturan lampu = $\dfrac{18!}{(4!)(3!)(5!)(6!)}$ cara

Latihan:

1. 100 orang mahasiswa dikirim ke 5 negara, masing-masing negara 20 orang mahasiswa. Berapa banyak cara pengiriman mahasiswa?

   Jawaban: $n = 100$, $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = 20$,

   $P(100; 20, 20, 20, 20, 20) = 100!/(20!\ 20!\ 20!\ 20!\ 20!)$

2. Berapa banyak *string* yang dapat dibentuk dari huruf-huruf kata "CONGRESS" sedemikian sehingga dua buah huruf "S" tidak terletak berdampingan?

   Jawaban: $P(8; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2) - 7!$

3. Tentukan banyaknya cara agar 4 buku matematika berbeda, 3 buku sejarah berbeda, 3 buku kimia berbeda, dan 2 buku sosiologi berbeda dapat disusun dalam satu baris sedemikian sehingga (untuk masing-masing soal)

   (a) semua buku yang topiknya sama letaknya bersebelahan,

   (b) urutan buku dalam susunan bebas.

   Jawaban: (a) $(4!)(4!)(3!)(3!)(2!)$
   (b) $12!$

Kombinasi Dengan Pengulangan

Misalkan terdapat *r* buah bola yang semua berwarna sama dan tersedia *n* buah kotak.

Tinjau dua kasus berikut:

(i) Jika masing-masing kotak hanya boleh diisi *paling banyak satu* buah bola, maka jumlah cara memasukkan bola: $C(n, r)$.

(ii) Jika masing-masing kotak boleh *lebih dari satu* buah bola (tidak ada pembatasan jumlah bola), maka jumlah cara memasukkan bola adalah $C(n + r - 1, r)$. Perhatikan bahwa

$$\boxed{C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1)}$$

Contoh 13. Pada persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, x_i adalah bilangan bulat ≥ 0. Berapa jumlah kemungkinan solusinya?

Penyelesaian: ___ ___ ___ ___

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

Analogi: 12 buah bola akan dimasukkan ke dalam 4 buah kotak (dalam hal ini, $n = 4$ dan $r = 12$).

Bagilah keduabelas bola itu ke dalam tiap kotak. Misalnya, salah satu cara pembagiannya adalah sbb:

Kotak 1 diisi 3 buah bola ($x_1 = 3$)

Kotak 2 diisi 5 buah bola ($x_2 = 5$)

Kotak 3 diisi 2 buah bola ($x_3 = 2$)

Kotak 4 diisi 2 buah bola ($x_4 = 2$)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 + 5 + 2 + 2 = 12$

Itu hanya salah satu solusinya. Semuanya ada sebanyak

$$C(n + r - 1, r) = C(4 + 12 - 1, 12) = C(15, 12) = 15!/(12!\ 3!) = 455$$

buah solusi.

Contoh 14: Berapa banyak solusi bilangan bulat $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ jika $x_1 \geq 2$ dan x_i lainnya ≥ 0.

Penyelesaian:

Analogi: 12 buah bola akan dimasukkan ke dalam 4 buah kotak.

Namun karena $x_1 \geq 2$, maka masukkan 2 bola terlebih dahulu ke dalam kotak x_1 agar x_1 dijamin terisi minimal 2 buah bola.

Bola yang tersisa adalah 12 – 2 = 10. Sepuluh bola ini dibagi lagi ke dalam 4 kotak (termasuk kotak x1).

Sekarang n = 4 dan r = 10, sehingga jumlah seluruh solusinya adalah sebanyak

$$C(4 + 10 - 1, 10) = C(13, 10) = 13!/(10!\ 3!) = 286$$

buah solusi.

Contoh 15. 20 buah apel dan 15 buah jeruk dibagin kepada 5 orang anak, tiap anak boleh mendapat lebih dari 1 buah apel dan jeruk, atau tidak sama sekali. Berapa jumlah cara pembagian yang dapat dilakukan?

<u>Penyelesaian</u>:

n = 5, r_1 = 20 (apel) dan r_2 = 15 (jeruk)

Membagi 20 apel kepada 5 anak: $C(5 + 20 - 1, 20)$ cara,

Membagi 15 jeruk kepada 5 anak: $C(5 + 15 - 1, 15)$ cara.

Jumlah cara pembagian kedua buah itu adalah

$$C(5 + 20 - 1, 20) \times C(5 + 15 - 1, 15) = C(24, 20) \times C(19, 15)$$

Latihan:

1. Ada 10 soal di dalam ujian akhir *Matematika Diskrit*. Berapa banyak cara pemberian nilai (bilangan bulat) pada setiap soal jika jumlah nilai keseluruhan soal adalah 100 dan setiap soal mempunyai nilai paling sedikit 5. (Khusus untuk soal ini, nyatakan jawaban akhir anda dalam $C(a, b)$ saja, tidak perlu dihitung nilainya)

2. Di perpustakaan Teknik Informatika terdapat 3 jenis buku: buku Algoritma dan Pemrograman, buku Matematika Diskrit, dan buku Basisdata. Perpustakaan memiliki paling sedikit 10 buah buku untuk masing-masing jenis. Berapa banyak cara memilih 10 buah buku?

3. Dari sejumlah besar koin 25-an, 50-an, 100-an, dan 500-an, berapa banyak cara lima koin dapat diambil?

4. Berapa banyak solusi bilangan bulat $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$ jika $0 \leq x_1 \leq 4$, $x_2 > 1$, $x_3 = 2$, dan x_i lainnya ≥ 0.

Koefisien Binomial

$(x + y)^0 = 1$ 1

$(x + y)^1 = x + y$ 1 1

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ 1 2 1

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ 1 3 3 1

$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ 1 4 6 4 1

$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$ 1 5 10 10 5 1

$$(x + y)^n = C(n, 0)\, x^n + C(n, 1)\, x^{n-1} y + C(n, 2)\, x^{n-2} y^2 \ldots + C(n, k)\, x^{n-k} y^k + \ldots + C(n, n) y^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C(n, k) x^{n-k} y^k$$

Koefisien untuk $x^{n-k}y^k$ adalah C(n, k). Bilangan C(n, k) disebut **koefisien binomial**.

Segitiga Pascal

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 200 252 200 120 45 10 1

Pascal's Triangle - Symmetry (Mirror Image)

Central "spine" numbers (blue) are equal to the "binomial coefficient sum":
Central binomial coefficients: C(2*n,n) = (2*n)!/(n!)^2.

$$S_{n+1} = (2n)! \,/\, (n!)^2$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1
1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1
1 17 136 680 2380 6188 12376 19448 24310 24310 19448 12376 6188 2380 680 136 17 1
1 18 153 816 3060 8568 18564 31824 43758 48620 43758 31824 18564 8568 3060 816 153 18 1

$$(x + y)^n = C(n, 0)\, x^n + C(n, 1)\, x^{n-1} y + C(n, 2)\, x^{n-2} y^2 \ldots + C(n, k)\, x^{n-k} y^k + \ldots + C(n, n) y^n$$

Contoh 16. Jabarkan $(3x - 2)^3$.

Penyelesaian:

Misalkan $a = 3x$ dan $b = -2$,

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= C(3, 0)\, a^3 + C(3, 1)\, a^2b^1 + C(3, 2)\, a^1b^2 + C(3, 3)\, b^3 \\ &= 1\,(3x)^3 + 3\,(3x)^2\,(-2) + 3\,(3x)\,(-2)^2 + 1\,(-2)^3 \\ &= 27\, x^3 - 54x^2 + 36x - 8\end{aligned}$$

$(x + y)^n = C(n, 0)\, x^n + C(n, 1)\, x^{n-1} y + C(n, 2)\, x^{n-2} y^2 \ldots + C(n, k)\, x^{n-k} y^k + \ldots + C(n, n) y^n$

Contoh 17. Tentukan suku keempat dari penjabaran perpangkatan $(x - y)^5$.

Penyelesaian:

$(x - y)^5 = (x + (-y))^5$.

Suku keempat adalah: $C(5, 3)\, x^{5-3} (-y)^3 = -10x^2y^3$.

Contoh 18. Buktikan bahwa $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$.

Penyelesaian:

Dari persamaan binomial, ambil $x = y = 1$, sehingga

$$\Leftrightarrow (x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^{n-k} y^k$$

$$\Leftrightarrow (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, 1^{n-k}\, 1^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)$$

$$\Leftrightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)$$

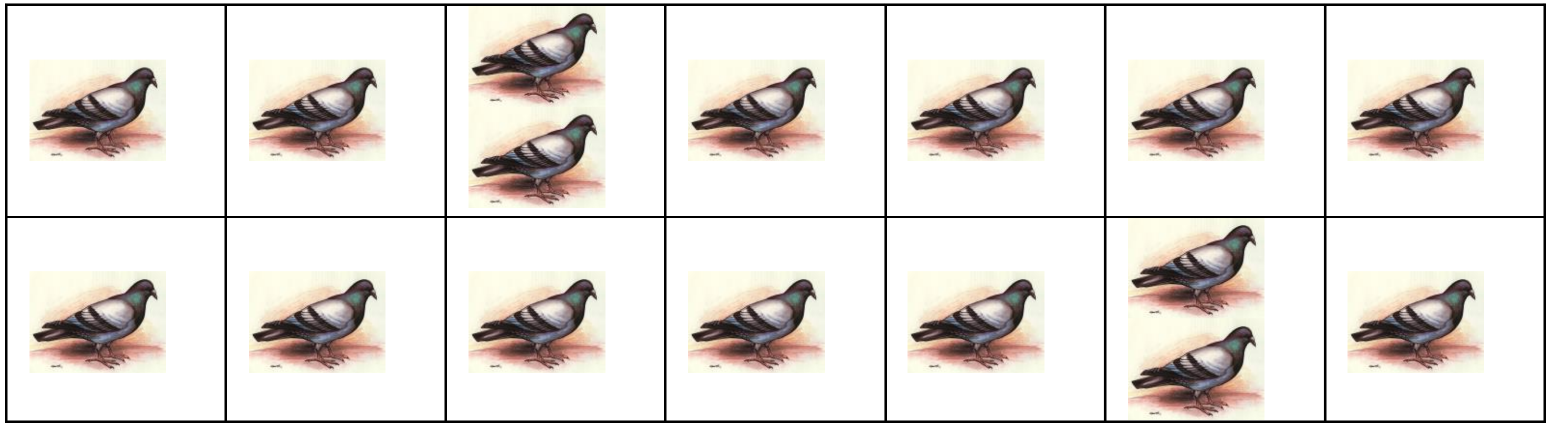
Latihan: Perlihatkan bahwa $\sum_{k=0}^{n} 2^k \, C(n, k) = 3^n$

Pigeonhole Principle

- *Pigeonhole principle* = prinsip sarang burung merpati

- **Prinsip Sarang Merpati.** Jika n + 1 atau lebih objek ditempatkan di dalam n buah kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang berisi dua atau lebih objek.

  Bukti: Misalkan tidak ada kotak yang berisi dua atau lebih objek. Maka, total jumlah objek paling banyak adalah n. Ini kontradiksi, karena jumlah objek paling sedikit n + 1.



Gambar Kandang merpati dengan 14 buah sarang (*pigeonhole*) dan 16 ekor merpati.

- Prinsip sarang merpati, jika diterapkan dengan baik, akan memberikan hanya objek-objek yang ada, dan bukan memberitahukan bagaimana mencari objek tersebut dan berapa banyak.

- Pada masalah sarang burung merpati, prinsip ini tidak memberitahukan di sarang merpati mana yang berisi lebih dari satu ekor merpati.

Contoh 19. Dari 27 orang mahasiswa, paling sedikit terdapat dua orang yang namanya diawali dengan huruf yang sama, karena hanya ada 26 huruf dalam alfabet.

Jika kita menganggap 27 huruf awal dari nama-nama mahasiswa sebagai merpati dan 26 huruf alfabet sebagai 26 buah sarang merpati, kita bisa menetapkan pemasangan 27 huruf awal nama ke 26 huruf alfabet seperti halnya pemasangan merpati ke sarang merpati.

Menurut prinsip sarang merpati, beberapa huruf awal alfabet dipasangkan dengan paling sedikit dua huruf awal nama mahasiswa.

Contoh 20. Misalkan terdapat banyak bola merah, bola putih, dan bola biru di dalam sebuah kotak. Berapa paling sedikit jumlah bola yang diambil dari kotak (tanpa melihat ke dalam kotak) untuk menjamin bahwa sepasang bola yang berwarna sama terambil?

Penyelesaian:

Jika setiap warna dianggap sebagai sarang merpati, maka n = 3. Karena itu, jika orang mengambil paling sedikit n + 1 = 4 bola (merpati), maka dapat dipastikan sepasang bola yang berwarna sama ikut terambil. Jika hanya diambil 3 buah, maka ada kemungkinan ketiga bola itu berbeda warna satu sama lain. Jadi, 4 buah bola adalah jumlah minumum yang harus diambil dari dalam kotak untuk menjamin terambil sepasang bola yang berwarna sama.

Prinsip Sarang Merpati yang Dirampatkan. Jika M objek ditempatkan di dalam n buah kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang berisi minimal $\lceil M/n \rceil$ objek.

- **Contoh 21.** Di antara 50 orang mahasiswa, terdapat paling sedikit $\lceil 50/12 \rceil$ = 5 orang yang lahir pada bulan yang sama.

Contoh 22. Tinjau kembali Contoh 20. Berapa paling sedikit jumlah bola yang harus diambil dari dalam kotak sehingga 3 pasang bola yang setiap pasangnya berwarna sama terambil?

Penyelesaian:

Tiga pasang bola yang setiap pasang berwarna sama berarti semuanya 6 buah bola. Pada masalah ini, n masih tetap sama dengan 3 (yaitu jumlah warna), dan kita perlu mengambil paling sedikit M buah bola untuk memastikan bahwa $\lceil M/3 \rceil = 6$ bola mengandung setiap pasang bola yang berwarna sama.

Nilai $M = 3 \cdot 5 + 1 = 16$. Jika kita hanya mengambil 15 bola, maka mungkin saja hanya terambil 2 macam bola yang berwarna sama.

Jadi, jumlah 16 buah bola adalah jumlah minimal yang perlu kita ambil dari dalam kotak untuk memastikan bahwa 3 pasang bola yang setiap pasang berwarna sama terambil.

TAMAT